Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

6. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Reguläre Matrizen und Elementarmatrizen

Notation: Für eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir A^k für das $k-fache$ Matrixprodukt

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}.$$

Außerdem benutzen wir die Konvention $A^0 = I_n$, wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 1. ((Alleine) 3P+1P)

Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine reelle 2×2 Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.
Hinweis: Wenn A invertierbar ist, dann ist die Abbildung $\varphi_A \colon \mathbb{R}^{2 \times 2} \to \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\varphi_A(B) = A \cdot B$ injektiv.

(b) Geben Sie eine reelle 2×2 Matrix A mit $A^2 = -I_2$ an.

Aufgabe 2. ((Alleine) 1P+2P+1P)

(a) Es sei $f(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ ein reelles Polynom mit $a_0 \neq 0$. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine relle $n \times n$ Matrix mit

$$f(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot A^i = \underline{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Berechnen Sie $A^3 - 3A^2 + 4I_n$ und eine Inverse A^{-1} von A.

(c) Schreiben Sie die Matrix $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ als Produkt von Vertauschungsmatrizen, wobei

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 18. 12. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe)1P+1P+1P+1P)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen, sodass $A \cdot N = N \cdot A$ gilt. Es bezeichne $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $I_n - (-1)^k N^k = (I_n + N) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i$ (Dabei benutzen wir die Konvention $N^0 = I_n$).

(ii) Gilt $N^k = \underline{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt auch $(A \cdot N)^k = \underline{0}$.

(iii) Gilt $N^k = \underline{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist $I_n + N$ invertierbar.

(iv) Ist die Matrix A regulär und gilt $N^k = \underline{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann ist $A + N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 4P)

Es sei $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine reguläre Matrix, sodass $B \cdot M = M \cdot B$ für alle regulären Matrizen $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt. Zeigen Sie, dass dann ein $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert mit $B = r \cdot I_n$.
Hinweis: Denken Sie an reguläre Matrizen, denen Sie viel Zeit in der Vorlesung gewidmet haben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 18. 12. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.